Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова
Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Квантовые системы с переменным гамильтонианом.

Курсовая работа

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, академик
Рубаков Валерий Анатольевич

Студент второго курса 202 группы
Громыко Дмитрий Алексеевич

Москва — 2017

Содержание

Введение

В теории безспиновой квантовой механики наиболее общий вопрос о состоянии системы можно изучать, меняя ее гамильтониан и расчитывая временное изменение волновой функции или отдельных наблюдаемых величин. Такие задачи часто не имеют точного решения, однако, применяя к ним различные методы, удается получить результат аналитически, избегая численного решения задачи. В данной работе рассматриваются как раз подобные случаи, когда при заданном начальном состоянии требуется узнать, как эволюционирует система в условиях нового Гамильтониана, для которого подготовленное состояние не является собственным.

1 Выключение гармонического осциллятора

Условие. Частица находится в основном состоянии в потенциале гармонического осциллятора. Потенциал выключают на время t, а затем снова включают. Найти вероятность того, что частица останется в основном состоянии.

Решение.Введем обозначения $k^2 = \dfrac{2m\omega}{\hbar}$. Разложим заданную функцию начального состояния по собственным функциям гамильтониана свободной частицы. Для этого представим заданный волновой пакет как интеграл Фурье

$$\begin{aligned} \Psi(k,x,t) &= C(k)e^{i(kx-wt)} \\ \Psi(x,t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(k,x,t)dk \end{aligned} \tag{1}$$

Вспоминая, чему равна волновая функция основного состояния

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} exp[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2] \tag{2}$$

определим ее в начальный момент в соответствии с разложением:

$$\Psi(x,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(k)e^{ikx}dk \tag{3}$$

Коэффициенты интеграла Фурье будут выражаться

$$C(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\Psi(x,0)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - ikx]dx =$$

$$= \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp[-\frac{1}{2}a^2k^2] \tag{4}$$

С учетом полученного выражения, $(\frac{m\omega}{\hbar} = \frac{1}{a^2})$, зависящая от времени функция будет выражаться интегралом:

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{a^2}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{1}{2}a^2k^2 + ikx - i\frac{\hbar t}{2m}k^2]dx \tag{5}$$

Вычисления приводят к результату

$$\Psi(x,t) = \frac{(1/a^2\pi)^{1/4}}{(1+i\frac{\hbar t}{ma^2})^{1/2}}exp[-\frac{x^2}{2a^2\left(1+i\frac{\hbar t}{ma^2}\right)}] \tag{6}$$

Тогда вероятность определяется как квадрат модуля скалярного произведения эволюционировавшей волновой функции и основного состояния.

$$W_0 = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\left(\frac{1}{a^2\pi}\right)^{1/4}exp[-\frac{x^2}{2a^2}]dx\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{t\omega}{2}\right)^2}} \tag{7}$$

Видно, что волновая функция расплывается со временем, причем тем сильнее, чем больше частота колебаний осциллятора, т.е. чем уже был спектр, тем быстрее он растет. Так же из вида волновой функции видно, что в произвольный момент времени она остается гауссианом.

2 Квазистационарные уровни

Условие. Найти квазистационарные уровни и их времена жизни для частицы в одномерном потенциале

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ \frac{\hbar^2\varkappa}{m}\delta(x-a), & x \geqslant 0, \qquad a > 0 \end{cases} \tag{8}$$

Решение.Уравнения Шредингера для областей $a > x > 0$ и $x > a$ будут давать решение в виде волновой функции свободной частицы.

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin(kx), & a \leqslant x \geqslant 0 \\ B\sin(kx+\phi), & x \geqslant a \end{cases} \tag{9}$$

На границе потенциального барьера производная волновой функции будет терпеть разрыв $2\varkappa\psi(a)$, это нетрудно показать, проинтегрировав уравнение Шредингера вблизи потенциального барьера

$$\int_{a-}^{a+} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{\hbar^2}{m}\varkappa\delta(x-a)\psi\right)dx = \int_{a-}^{a+} E\psi dx \tag{10}$$

$$\psi'(a+) - \psi'(a-) = 2\varkappa\psi(a) \tag{11}$$

Тогда, нормируя волновую функцию в области $x > a$, так, чтобы поток вправо был равен единице, составим уравнения для определения волновой функции с учетом граничных условий:

$$\sin(ka+\phi) = A\sin(ka); \tag{12}$$

$$k\cos(ka+\phi) = kA\cos(ka) + 2\varkappa A\sin(ka) \tag{13}$$

Поделив второе уравнение на первое, получаем соотношения для определения фазового сдвига и амплитуды волновой функции в добарьерной зоне

$$k\,\mathrm{ctg}(ka+\phi) = k\,\mathrm{ctg}(ka) + 2\varkappa \tag{14}$$

$$\begin{aligned} k^2\cos^2(ka+\phi) &= k^2 - A^2k^2\sin^2(ka) = \\ &= k^2A^2\cos^2(ka) + 4\varkappa A^2\sin^2(ka) + 4k\varkappa A^2\sin(ka)\cos(ka) \end{aligned} \tag{15}$$

Приведенное к виду

$$\frac{1}{A^2} = 1 + 2\frac{\varkappa}{k}\sin(2ka) + 2\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2(1-\cos(2ka))$$

уравнение на амплитуду легко поддается анализу: при больших $\varkappa$ волновая функция внутри огранниченной области будет заметно отличной от нуля в случае стремления к нулю $\sin(ka)$. С помощью дифференцирования по величине волнового вектора можно получить точки, определяющие минимумы и максимумы выражения, однако система получается громозкой и едва ли решаемой (автор работы не видит способа разрешить относительно k выражение $\sin(2ka)(\frac{2\varkappa}{k} - \frac{1}{ak}) + \frac{2\varkappa}{ak^2}\cos(2ka) +$

$2\cos(2ka) - \dfrac{2\varkappa}{ak^2} = 0$, Wolfram Mathematica также не дает аналитического решения). Однако можно попробовать взять частную производную при условии $\varkappa/k = const$, что соответствует случаю, когда изменение $2ka$ на 2π не слишком изменяет отношение $\varkappa/k$. В этом случае равенство нулю производной является условием экстремумов:

$$\frac{2\varkappa^2}{k^2}\sin(2ka) + \frac{2\varkappa}{k}\cos(2ka) = 0 \tag{16}$$

$$\operatorname{tg}(2k_n a) = -\frac{k_n}{\varkappa} \tag{17}$$

Для определенности пронумерованные значения волного вектора будем считать по формуле $2k_n a = n\pi - \operatorname{arctg}(k_n/\varkappa)$, а тогда тригонометрические функции будут равны

$$\begin{aligned} \sin(2k_n a) &= (-1)^{n+1}\frac{k_n/\varkappa}{\sqrt{1+(k_n/\varkappa)^2}} \\ \cos(2k_n a) &= (-1)^n\frac{1}{\sqrt{1+(k_n/\varkappa)^2}} \end{aligned} \tag{18}$$

В этом случае минимумы будут наблюдаться в случае нечетных n:

$$\frac{1}{A^2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{1+(k_n/\varkappa)^2}} + \frac{2}{(k_n/\varkappa)^2}(1 + \frac{1}{\sqrt{1+(k_n/\varkappa)^2}}) \approx \frac{4\varkappa^2}{k_n^2} \tag{19}$$

А максимумы при четных n:

$$\frac{1}{A^2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{1+(k_n/\varkappa)^2}} + \frac{2}{(k_n/\varkappa)^2}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(k_n/\varkappa)^2}}) \approx \frac{k_n^2}{4\varkappa^2} \tag{20}$$

Приближение было получено в условии малости $(k_n/\varkappa) \ll 1$ с помощью разложения в ряд до третьего порядка.

Теперь разложим амплитуду вблизи квазистационарного уровня в соответствии с соотношением

$$2k_r a = 2n\pi - \operatorname{arctg}\frac{k}{\varkappa}$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{k^2}{4\varkappa^2}\left(1 + \frac{4\varkappa^4}{k^4}(2ka - 2k_r a)^2\right). \tag{21}$$

Ширина квазистационарного уровня получается равной

$$\Delta E \approx \frac{\sqrt{2mE^3}}{2a\varkappa}, \tag{22}$$

а время жизни

$$\tau = \frac{2\hbar a\varkappa}{\sqrt{2mE^3}} \tag{23}$$

3 Двухуровневый гамильтониан 1

Условие. Рассмотрим двухуровневую систему с гамильтонианом

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 & \epsilon \\ \epsilon & \omega_2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где параметры не зависят от времени. Пусть при t = 0 система находилась в состоянии

$$\psi(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Найти вероятности $P_1(t)$ и $P_2(t)$ обнаружить систему в состояниях

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

в момент времени t. Рассмотреть как общий случай, так и отдельно случаи $\epsilon \ll |\omega_1 - \omega_2|$ и $\epsilon \gg |\omega_1 - \omega_2|$

Решение. Запишем матричное уравнение, определяющее эволюцию состояния

$$\widehat{H}\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt} \qquad \Psi = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \epsilon \\ \epsilon & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 A_1 + \epsilon A_2 \\ \omega_2 A_2 + \epsilon A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\hbar\dfrac{dA_1}{dt} \\ \\ i\hbar\dfrac{dA_2}{dt} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Амплитуды квантовых состояний связаны следующим образом:

$$A_1 = \frac{i\hbar}{\epsilon}\frac{dA_2}{dt} - \frac{\omega_2 A_2}{\epsilon} \tag{29}$$

$$\ddot{A}_2 + \frac{i}{\hbar}(\omega_1 + \omega_2)\dot{A}_2 + \frac{\epsilon^2 - \omega_1\omega_2}{\hbar^2}A_2 = 0 \tag{30}$$

Решение этой системы для A_2 будет представимо в виде

$$A_2 = C_1 exp\left[-\frac{it}{2\hbar}\left(\omega_1 + \omega_2 + \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}\right)\right] + \\ + C_2 exp\left[-\frac{it}{2\hbar}\left(\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}\right)\right], \tag{31}$$

откуда в соответствии с выражением (29) можно найти A_1:

$$A_1 = C_1 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 + \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}}{2\epsilon} \right) \times \\ \exp\left[-\frac{it}{2\hbar} \left(\omega_1 + \omega_2 + \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \right) \right] + \\ + C_2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 - \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}}{2\epsilon} \right) \times \\ \exp\left[-\frac{it}{2\hbar} \left(\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \right) \right]$$

Учитывая начальные условия,

$$C = \frac{-\epsilon}{\sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}} = C_2 = -C_1. \tag{32}$$

После этого первую компоненту вектора стоит переписать в виде, из которого найти квадрат модуля не составляет труда:

$$A_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{it}{2\hbar}(\omega_1 + \omega_2)} \left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}} + 1 \right) e^{-i\alpha} \right. \\ \left. - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}} - 1 \right) e^{i\alpha} \right) \tag{33}$$

$$P_1 = ||A_1||^2 = \left|\left| \cos(\alpha) - i \sin(\alpha) \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2}} \right|\right|^2 = \\ = 1 - \sin^2 \left(\frac{t}{2h} \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\epsilon} \right)^2} \tag{34}$$

Это и есть вероятность нахождения системы в первом состоянии. Нетрудно проверить, что вероятность перехода во второе состояние есть

$$P_2 = \sin^2 \left(\frac{t}{2h} \sqrt{4\epsilon^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\epsilon} \right)^2} \tag{35}$$

Очевидно, суммарная вероятность равна единице, так как других состояний у системы нет.

В случае, когда $\epsilon \gg |\omega_1 - \omega_2|$

$$P_1 = 1 - \sin^2\left(\frac{\epsilon t}{h}\right) \qquad P_2 = \sin^2\left(\frac{\epsilon t}{h}\right) \tag{36}$$

С другой стороны, если пренебречь величиной ϵ, то вероятность остаться в первом состоянии стремится к единице, что ожидаемо: для гамильтониана, содержащего только диагональные элементы, эволюция каждой компоненты вектор-функции не зависит от других компонент. Поэтому если в начальный момент состояние было нулевым, то оно не изменится со временем.

4 Двухуровневый гамильтониан 2

Условие. Рассмотрим двухуровневую систему с гамильтонианом

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega(t) & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

Причем ϵ - малая величина, не зависящая от времени, а $\omega(t)$ медленно меняется от большого положительного значения $\omega_i > 0$ до большого по абсолютной величине отрицательного значения $\omega_f < 0$. Пусть начальное состояние системы имело вид

$$\psi_i \equiv \psi(t \to -\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найти вероятность обнаружить систему в конечных состояниях

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем собственные значения гамильтониана.

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega(t) & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2}(\hbar\omega(t) - \sqrt{(\hbar\omega(t))^2 + 4\varepsilon^2}) \tag{39}$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{2}(\hbar\omega(t) + \sqrt{(\hbar\omega(t))^2 + 4\varepsilon^2}) \tag{40}$$

Собственные вектора будут иметь следующий вид:

$$x_1 = \lambda_1(t), \quad y_1 = \varepsilon \tag{41}$$

$$x_2 = \lambda_2(t), \quad y_2 = \varepsilon \tag{42}$$

Продифференцируем $\lambda_{1,2}$ по времени. Поскольку $\omega(t)$ медленно меняется со временем, то и $\lambda_{1,2}$ подчиняется этому условию.

$\dfrac{d\lambda_1}{dt}(t) = \dfrac{\hbar}{2}(1 - \dfrac{\hbar\omega(t)}{\sqrt{(\hbar\omega(t))^2 + 4\varepsilon^2}})\dfrac{d\omega}{dt}(t),$

$\dfrac{d\lambda_2}{dt}(t) = \dfrac{\hbar}{2}(1 + \dfrac{\hbar\omega(t)}{\sqrt{(\hbar\omega(t))^2 + 4\varepsilon^2}})\dfrac{d\omega}{dt}(t) \Longrightarrow$

$\left|\dfrac{d\lambda_1}{dt}(t)\right| \leq \left|\hbar\dfrac{d\omega}{dt}(t)\right|, \left|\dfrac{d\lambda_2}{dt}(t)\right| \leq \left|\hbar\dfrac{d\omega}{dt}(t)\right|.$

В этом случае имеет место адиабатическая теорема

$$\psi(t) = \frac{A_1}{\sqrt{(\lambda_1(t))^2 + \varepsilon^2}} \exp(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_1(t')dt')(\lambda_1(t)\psi_1 + \varepsilon\psi_2) +$$

$$+ \frac{A_2}{\sqrt{(\lambda_2(t))^2 + \varepsilon^2}} \exp(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_2(t')dt')(\lambda_2(t)\psi_1 + \varepsilon\psi_2) \tag{43}$$

В начальном состоянии собственные значения в силу большой величины ω_i можно разложить в ряд

$$\lambda_1(t \to -\infty) = \frac{1}{2}(\hbar\omega_i - \hbar\omega_i\sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{(\hbar\omega_f)^2}}) = -\frac{\varepsilon^2}{\hbar\omega_i} + \ldots \tag{44}$$

$$\lambda_2(t \to -\infty) = \frac{1}{2}(\hbar\omega_i + \hbar\omega_i\sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{(\hbar\omega_f)^2}}) = \hbar\omega_i + \ldots \Longrightarrow \tag{45}$$

Так как в первом слагаемом, с учетом указанного разложения, преобладает второе состояние, его придется исключить.

$A_1 = 0$, $A_2 = 1$.

В конечный момент времени собственные вектора можно будет представить иначе:

$$\lambda_1(t \to \infty) = \frac{1}{2}(\hbar\omega_f + \hbar\omega_f\sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{(\hbar\omega_f)^2}}) = \hbar\omega_f + \ldots \tag{46}$$

$$\lambda_2(t \to \infty) = \frac{1}{2}(\hbar\omega_f - \hbar\omega_f\sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{(\hbar\omega_f)^2}}) = -\frac{\varepsilon^2}{\hbar\omega_f} + \ldots \tag{47}$$

Таким образом, в конечный момент времени

$$\psi(t\to\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2/(\hbar\omega_f)^2}}\exp(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_2(t')dt')(-\frac{\varepsilon}{\hbar\omega_f}\psi_1+\psi_2) \qquad (48)$$

$P_1 = 0$, $P_2 = 1$.

5 Перевернутый гармонический осциллятор

Условие. Рассмотрим "перевернутый"гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = -\frac{kx^2}{2}+\frac{p^2}{2m}$$

Пусть система в начальный момент находится в состоянии

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}b}}\exp(-\frac{x^2}{2b^2})$$

Найти асимптотику $\langle x^2(t)\rangle$ при больших t. Сравнить с квадратом асимптотики при больших t решения классических уравнений движения с начальными условиями $x(0) = r_0$, $x'(0) = 0$.

Решение. Для начала исследуем классический случай. Из уравнений Гамильтона в этом случае выглядят просто

$$\begin{gathered}\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}-\frac{1}{2}kx^2) = kx,\\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial p}(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}-\frac{1}{2}kx^2) = \frac{p}{m}\end{gathered} \qquad (49)$$

Далее, найдем общий вид решения уравнений движения

$$\begin{gathered}m\frac{d^2x}{dt^2} = kx\\ x(t) = A\sinh(\sqrt{\frac{k}{m}}t)+B\cosh(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\\ \frac{dx}{dt}(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}(A\cosh(\sqrt{\frac{k}{m}}t)+B\sinh(\sqrt{\frac{k}{m}}t))\end{gathered} \qquad (50)$$

После подстановки начальных условий, находим точное решение и асимптотику:

$$x(0) = r_0, \frac{dx}{dt}(0) = 0 \Longrightarrow x(t) = r_0 \cosh(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \tag{51}$$

$$(x(t \to \infty))^2 \sim (\frac{r_0}{2})^2 \exp(2\sqrt{\frac{k}{m}}t). \tag{52}$$

Теперь займемся квантовым случаем, соответствующим гамильтониану

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{2}kx^2\psi(x,t) \tag{53}$$

Для нахождения средних перейдем к представлению Гейзенберга:

$$\begin{gathered} \hat{x}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)x\exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t) \\ \hat{p}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t) \\ \hat{H} = \exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)\hat{H}\exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t) = \frac{(\hat{p}(t))^2}{2m} - \frac{1}{2}k(\hat{x}(t))^2 \end{gathered} \tag{54}$$

Запишем уравнения Гейзенберга

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}(t)] = \frac{i}{\hbar}[\frac{(\hat{p}(t))^2}{2m}, \hat{x}(t)] = \\ = -\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}(\hat{p}(t)[\hat{x}(t),\hat{p}(t)] + [\hat{x}(t),\hat{p}(t)]\hat{p}(t)) = \frac{\hat{p}(t)}{m} \end{aligned} \tag{55}$$

;

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}(t)] = -\frac{i}{\hbar}[\frac{1}{2}k(\hat{x}(t))^2, \hat{p}(t)] = \\ = -\frac{i}{\hbar}\frac{k}{2}(\hat{x}(t)[\hat{x}(t),\hat{p}(t)] + [\hat{x}(t),\hat{p}(t)]\hat{x}(t)) = k\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{56}$$

Из них видно, что $\frac{d^2\hat{x}}{dt^2}(t) = \frac{k}{m}\hat{x}(t)$, $\frac{d^2\hat{p}}{dt^2}(t) = \frac{k}{m}\hat{p}(t)$, начальными условиями следует считать $\hat{x}(0) = x$, $\hat{p}(0) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, тогда решения уравнений будут выглядеть следующим образом:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}}\sinh(\sqrt{\frac{k}{m}}t)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}) + x\cosh(\sqrt{\frac{k}{m}}t), \tag{57}$$

$$\hat{p}(t) = \sqrt{mk}x\sinh(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \cosh(\sqrt{\frac{k}{m}}t)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}). \tag{58}$$

Осталось только вычислить средний квадрат расстояния: $\left\langle (x(t))^2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|\psi(x,t)\right|^2 dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)\psi(x,0))^* x^2 \exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)\psi(x,0)dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\psi(x,0))^* \exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t) x^2 \exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)\psi(x,0)dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\psi(x,0))^* (\hat{x}(t))^2 \psi(x,0)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{x}(t)\psi(x,0)\right|^2 dx,$$

$$\hat{x}(t\to\infty)\psi(x,0) \sim \frac{1}{2}\exp(\sqrt{\frac{k}{m}}t)(\frac{1}{\sqrt{mk}}(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0)) + x\psi(x,0))$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0) = -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}b}}\frac{x}{b^2}\exp(-\frac{x^2}{2b^2}) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{mk}}(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0)) + x\psi(x,0)) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}b}}\frac{x}{b}\exp(-\frac{x^2}{2b^2})(\frac{i\hbar}{\sqrt{mk}}\frac{1}{b} + b) \Longrightarrow$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{mk}}(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0)) + x\psi(x,0))\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}b}\frac{x^2}{b^2}\exp(-\frac{x^2}{b^2})(\frac{\hbar^2}{mk}\frac{1}{b^2} + b^2)$$

$$\left\langle (x(t\to\infty))^2 \right\rangle \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}}(\frac{\hbar^2}{mk}\frac{1}{b^2} + b^2)\exp(2\sqrt{\frac{k}{m}}t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{b^2}\exp(-\frac{x^2}{b^2})\frac{dx}{b} \qquad (59)$$

Для вычисления интеграла сделаем замену $s = \frac{x^2}{b^2}$, $ds = 2\frac{xdx}{b^2}$,

$$2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2}{b^2}\exp(-\frac{x^2}{b^2})\frac{dx}{b} = \int\limits_{0}^{\infty}\sqrt{s}\exp(-s)ds = \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Теперь можно записать окончательный результат для квантовой задачи:

$$\left\langle (x(t\to\infty))^2 \right\rangle \sim \frac{1}{8}(\frac{\hbar^2}{mk}\frac{1}{b^2} + b^2)\exp(2\sqrt{\frac{k}{m}}t) \qquad (60)$$

Заметим, множитель, обуславливающий эволюцию со временем полностью совпадает с аналогичным в расчетах для классический частицы. Как обычно, переходя к пределу $\hbar \to 0$, нетрудно заметить, что начальным условиям соответствует случай $r_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$, что является среднеквадратическим отклонением для начальной плотности вероятности.

6 Движение частиц по окружности

Условие. Две частицы массы m и заряда q каждая могут свободно двигаться по окружности радиуса R. Найти низколежащие уровни системы при $R \gg \dfrac{\hbar^2}{mq^2}$.

Решение. Перейдем в полярные координаты $x_1 = R\cos\varphi_1$, $y_1 = R\sin\varphi_1$, $x_2 = R\cos\varphi_2$, $y_2 = R\sin\varphi_2$, тогда расстояние между двумя частицами будет равно

$$\rho_{12} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = 2R\left|\sin((\varphi_1-\varphi_2)/2)\right|$$

Начнем с рассмотрения классического случая, в этом случае гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\varphi_2)^2 + \frac{q^2}{2R\left|\sin((\varphi_1-\varphi_2)/2)\right|} \tag{61}$$

можно с помощью замены $\alpha = \dfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2) - \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$, $I = 2mR^2$ привести к виду

$$H = \frac{1}{2}I(\dot\alpha)^2 + \frac{1}{2}I(\dot\beta)^2 + \frac{q^2}{2R\left|\cos\alpha\right|}. \tag{62}$$

Теперь, вводя канонически сопряженные моменты импульса

$$L^{(\alpha)} = \frac{\partial H}{\partial\dot\alpha} = I\dot\alpha, \quad L^{(\beta)} = \frac{\partial H}{\partial\dot\beta} = I\dot\beta,$$

окончательно представим гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2I}(L^{(\alpha)})^2 + \frac{1}{2I}(L^{\beta})^2 + \frac{q^2}{2R\left|\cos\alpha\right|}. \tag{63}$$

В квантовом же случае будем иметь
$\hat H = \dfrac{1}{2I}(\hat L^{(\alpha)})^2 + \dfrac{1}{2I}(\hat L^{(\beta)})^2 + \dfrac{q^2}{2R\left|\cos\alpha\right|}$, $\hat L^{(\alpha)} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$, $\hat L^{(\beta)} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\beta}$
Таким образом, имеем уравнение Шредингера в новом виде:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\alpha,\beta,t) = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}(\alpha,\beta,t) - \\ - \frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}(\alpha,\beta,t) + \frac{q^2}{2R\left|\cos\alpha\right|}\psi(\alpha,\beta,t). \tag{64}$$

Очевидно, волновую функцию стоит искать в виде $\psi(\alpha,\beta,t) = u(\alpha)v(\beta)\exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$. Подставим ее в дифференциальное уравнение:

$$Eu(\alpha)v(\beta) = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2u}{d\alpha^2}(\alpha)v(\beta) - \frac{\hbar^2}{2I}u(\alpha)\frac{d^2v}{d\beta^2}(\beta) + \frac{q^2}{2R\,|\cos\alpha|}u(\alpha)v(\beta) \Longrightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{1}{u(\alpha)}\frac{d^2u}{d\alpha^2}(\alpha) - \frac{\hbar^2}{2I}\frac{1}{v(\beta)}\frac{d^2v}{d\beta^2}(\beta) + \frac{q^2}{2R\,|\cos\alpha|} = E$$

Разделим переменные:

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2u}{d\alpha^2}(\alpha) + \frac{q^2}{2R\,|\cos\alpha|}u(\alpha) = E^{(\alpha)}u(\alpha) \tag{65}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2v}{d\beta^2}(\beta) = E^{(\beta)}v(\beta) \tag{66}$$

Полная энергия состояния будет разлагаться на части, соответствующие колебаниям и свободному орбитальному движению $E = E^{(\alpha)} + E^{(\beta)}$. Учитывая то, что уровни низколежащие, частицы будут находиться все время в положении наибольшего удаления друг от друга. Таким образом

$$\alpha \ll 1 \Longrightarrow \frac{1}{|\cos\alpha|} = \frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2u}{d\alpha^2}(\alpha) + \frac{q^2}{4R}\alpha^2 u(\alpha) = (E^{(\alpha)} - \frac{q^2}{2R})u(\alpha). \tag{67}$$

Действительно, это уравнение колебаний, так что

$$E_n^{(\alpha)} = \frac{q^2}{2R} + \hbar\frac{q}{2R}\frac{n+1/2}{\sqrt{mR}} \tag{68}$$

$$u_n(\alpha) = H_n(\sqrt{\frac{q}{\hbar}\sqrt{mR}}\alpha)\exp(-\frac{1}{2}\frac{q}{\hbar}\sqrt{mR}\alpha^2). \tag{69}$$

Для второй компоненты $E^{(\beta)}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2v}{d\beta^2}(\beta) = E^{(\beta)}v(\beta), \quad v(\beta) = \exp(2\pi k i\beta) \tag{70}$$

$$E_k^{(\beta)} = 4\pi^2\frac{\hbar^2}{2I}k^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{mR^2}k^2 \tag{71}$$

Заметим, что в соответствии с условием $R \gg \frac{\hbar^2}{mq^2}$,

$$\frac{q^2}{2R} \gg \hbar\frac{q}{2R\sqrt{mR}} \gg \frac{\pi^2\hbar^2}{mR^2}$$

так что общая картина энергетического спектра, будет представлять эквидистантные уровни колебательного движения, пространство между которыми будет заполнено подуровнями с дополнительной энергией вращения системы как целого.

7 Движение частиц на плоскости

Условие. Рассмотрим частицу, движущуюся на плоскости в потенциале

$$U(x, y) = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}\varepsilon(x)y^2,$$

где $\epsilon(x)$ - некоторая ограниченная функция, отличная от нуля в конечной области переменной x. Пусть при $x \to -\infty$ волновая функция имеет вид $\Psi(x, y) = \psi_0(y)\exp(iqx)$, где $\psi_0(y)$ - волновая функция основного состояния осциллятора. Считая $\epsilon(x)$ малой величиной, найти вероятность перехода осциллятора в первое и второе возбужденные состояния при $x \to \infty$.

Решение. Для начала запишем стационарное уравнение Шредингера. Интересно, что гамильтониан, вообще говоря, в этой задаче со временем не меняется.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x, y) + \frac{1}{2}ky^2\psi(x, y) + \frac{1}{2}\varepsilon(x)y^2\psi(x, y) = E\psi(x, y) \quad (72)$$

Энергия будет сохраняться и ее несложно вычислить. С учетом начального состояния $\psi(x \to -\infty, y) = \psi_0(y)\exp(iqx)$, это сумма энергий дополнительной фазы и основного состояния осциллятора.

$$E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (73)$$

Разложим полную волновую функцию по состояниям гармонического осциллятора оси y.

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}ky^2 = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}(\hat{a}_y^+\hat{a}_y + \frac{1}{2}) \quad (74)$$

$$\hat{a}_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}}y + \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}}\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \hat{a}_y^+ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}}y - \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

$$\psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\psi_n(y) \tag{75}$$

Чтобы определить $A_n(x)$ подставим полученный ряд в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2A_n}{dx^2}(x)\psi_n(y) + \sum_{n=0}^{\infty}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}(n+\frac{1}{2})A_n(x)\psi_n(y) \\ + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon(x)A_n(x)y^2\psi_n(y) = (\frac{\hbar^2q^2}{2m} + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}})\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\psi_n(y) \tag{76}$$

В терминах оперетоторов рождения и уничтожения y^2 представляется в виде

$$y^2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}(\hat{a}_y + \hat{a}_y^+)^2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}((\hat{a}_y)^2 + \hat{a}_y\hat{a}_y^+ + \hat{a}_y^+\hat{a}_y + (\hat{a}_y^+)^2) = \\ = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}((\hat{a}_y)^2 + 2\hat{a}_y^+\hat{a}_y + 1 + (\hat{a}_y^+)^2) \tag{77}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon(x)A_n(x)y^2\psi_n(y) = \frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}(\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n(n-1)}\varepsilon(x)A_n(x)\psi_{n-2}(y) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{(n+2)(n+1)}\varepsilon(x)A_n(x)\psi_{n+2}(y) + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\varepsilon(x)A_n(x)\psi_n(y)) = \\ = \frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\varepsilon(x)(A_0(x)+\sqrt{2}A_2(x))\psi_0(y) + \frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\varepsilon(x)(3A_1(x)+\sqrt{6}A_3(x))\psi_1(y) + \\ + \frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\varepsilon(x)(\sqrt{2}A_0(x) + 5A_2(x) + \sqrt{12}A_4(x))\psi_2(y) + \\ + \frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\sum_{n=3}^{\infty}\varepsilon(x)(\sqrt{n(n-1)}A_{n-2}(x) + (2n+1)A_n(x) + \\ + \sqrt{(n+2)(n+1)}A_{n+2}(x))\psi_n(y)$$

Коэффициенты при соответствующих волновых функциях гармонического осциллятора должны быть равны:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2A_0}{dx^2}(x) + \frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\varepsilon(x)(A_0(x) + \sqrt{2}A_2(x)) = \frac{\hbar^2q^2}{2m}A_0(x) \tag{78}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2A_1}{dx^2}(x)+\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}A_1(x)+$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\varepsilon(x)(3A_1(x)+\sqrt{6}A_3(x))=\frac{\hbar^2q^2}{2m}A_1(x) \quad (79)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2A_2}{dx^2}(x)+2\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}A_2(x)+$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\varepsilon(x)(\sqrt{2}A_0(x)+5A_2(x)+\sqrt{12}A_4(x))=\frac{\hbar^2q^2}{2m}A_2(x) \quad (80)$$

Согласно полученным уравнениям, все нечетные коэффициенты равны нулю.

Сделаем замену, введя новую переменную α:

$\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2=2\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}-\frac{\hbar^2q^2}{2m}, \Longrightarrow \alpha=\sqrt{\frac{4}{\hbar}\sqrt{mk}-q^2}$. Стоит отметить, что подкоренное выражение обнуляется в случае $2\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{\hbar^2q^2}{2m}$, где $\hbar q$ можно считать за импульс, соответствующий дополнительной фазе начального состояния. Это условие обеспечивает равенство кинетической энергии частицы с волновым вектором q и энергии перехода с основного на второе состояние гармонического осциллятора.

По теории возмущений

$A_0(x)=\exp(iqx)+\ldots\Longrightarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2A_2}{dx^2}(x)+\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2A_2(x)+\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\varepsilon(x)\exp(iqx)=0 \quad (81)$$

$-\frac{d^2A_2}{dx^2}(x)+\alpha^2A_2(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}\varepsilon(x)\exp(iqx)=0$, $A_2(x\to-\infty)=0\Longrightarrow$

Используя метод вариации постоянной, получим решение дифференциального уравнения

$$A_2(x)=\frac{\sqrt{2}}{4\alpha}\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp(-\alpha(x-x'))\varepsilon(x')\exp(iqx')dx'+$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{4\alpha}\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}\int\limits_{x}^{\infty}\exp(\alpha(x-x'))\varepsilon(x')\exp(iqx')dx'\Longrightarrow \quad (82)$$

$P_1=0$, $P_2=\lim\limits_{x\to\infty}|A_2(x)|^2$.

8 Возбуждение осциллятора внешней силой

Условие. На гармонический осциллятор массы m и жесткости k в течение времени $0 < t < t_0$ действует зависящая от времени сила $F(t)$ (при этом $F = 0$ при $t < 0$ и $t > t_0$). Найти вероятность перехода осциллятора с основного состояния на n-е возбужденное.

Решение. Запишем уравнение Шредингера для гамильтониана $H(t) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}kx^2 - F(t)x$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) + (\frac{1}{2}kx^2 - F(t)x)\psi(x,t) \tag{83}$$

Начальное состояние $\psi(x,0) = \sqrt[4]{\frac{1}{\pi\hbar}\sqrt{mk}}\exp(-\frac{1}{2\hbar}\sqrt{mk}x^2)$.

Целесообразно ввести операторы рождения и уничтожения и переписать гамильтониан в новом удобном виде

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}}\frac{\partial}{\partial x}),\ \hat{a}^+ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}}\frac{\partial}{\partial x}) \Longrightarrow$$

$$\hat{H}(t) = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{\sqrt{mk}}}F(t)(\hat{a} + \hat{a}^+) \tag{84}$$

В дальнейшем осуществим переход к картине Гейзенберга с помощью унитарного оператора $U(t)$:

$i\hbar\frac{d\hat{U}}{dt}(t) = \hat{H}(t)\hat{U}(t)$, $\hat{U}(0) = 1$.

Искомая вероятность перехода на n-ый уровень будет иметь вид

$$P_{0n} = \left|\langle n|\,\hat{U}(t_0)\,|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{n!}\left|\langle 0|\,\hat{a}^n\hat{U}(t_0)\,|0\rangle\right|^2 \tag{85}$$

Воспользуемся разложением

$$\hat{U}(t_0)\,|0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(\hat{a}^+)^l\,|0\rangle$$

Коэффициенты данного разложения находятся из соотношений

$$|0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\hat{U}^+(t_0)(\hat{a}^+)^l\,|0\rangle \Longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l\hat{a}\hat{U}^+(t_0)(\hat{a}^+)^l\,|0\rangle = 0 \tag{86}$$

Операторы рождения и уничтожения теперь зависят от времени

$$\hat{b}(t) = \hat{U}(t)\hat{a}\hat{U}^+(t) \Longrightarrow i\hbar\frac{d\hat{b}}{dt}(t) = \hat{U}(t)[\hat{H}(t),\hat{a}]\hat{U}^+(t)$$

,

$$[\hat{H}(t),\hat{a}] = -\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\hat{a} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{\sqrt{mk}}}F(t)$$

Из уравнений Гейзенберга получается дифференциальное уравнение для определения явного вида нового оператора $\hat{b}(t)$, который в начальный момент принимает значение $\hat{a}$.

$$-i\hbar\frac{d\hat{b}}{dt}(t) = -\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\hat{b}(t) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{\sqrt{mk}}}F(t), \quad \hat{b}(0) = \hat{a} \tag{87}$$

Решая методом вариации постоянной, найдем:

$$\hat{b}(t) = (\hat{a} + \frac{i}{2\hbar}\sqrt{\frac{2\hbar}{\sqrt{mk}}}\int_0^t F(t')\exp(i\sqrt{\frac{k}{m}}t')dt')\exp(-i\sqrt{\frac{k}{m}}t) \tag{88}$$

В дальнейшем будем пользоваться заменой

$$\alpha(t) = \frac{i}{2\hbar}\sqrt{\frac{2\hbar}{\sqrt{mk}}}\int_0^t F(t')\exp(-i\sqrt{\frac{k}{m}}t')dt'$$

.

Коммутатор новых и старых операторов, вообще говоря, не меняется $[\hat{b}(t),\hat{a}^+] = 1$.

Вернемся к разложению для отыскания коэффициентов A_l

$\sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l\hat{b}(t_0)(\hat{a}^+)^l|0\rangle = 0 \Longrightarrow$

$\sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l(\hat{a}^+)^l\hat{b}(t_0)|0\rangle + \sum\limits_{l=1}^{\infty} lA_l(\hat{a}^+)^{l-1}|0\rangle = 0 \Longrightarrow$

$\sum\limits_{l=0}^{\infty} \alpha(t_0)A_l(\hat{a}^+)^l|0\rangle + \sum\limits_{l=0}^{\infty}(l+1)A_{l+1}(\hat{a}^+)^l|0\rangle = 0 \Longrightarrow$

$(l+1)A_{l+1} - \alpha(t_0)A_l = 0 \Longrightarrow A_{l+1} = \alpha(t_0)\dfrac{A_l}{l+1} \Longrightarrow A_l = \dfrac{1}{l!}(\alpha(t_0))^l A_0.$

Теперь определим сумму квадратов коэффициентов

$\langle 0|\hat{U}(t_0)\hat{U}^+(t_0)|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 \Longrightarrow \sum\limits_{l=0}^{\infty}|A_l|^2\langle 0|\hat{a}^l(\hat{a}^+)^l|0\rangle = 1 \Longrightarrow$

$\sum\limits_{l=0}^{\infty} l!\,|A_l|^2 = 1 \Longrightarrow |A_0|^2\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{1}{l!}|\alpha(t_0)|^{2l} = 1 \Longrightarrow$

$$A_0^2\exp(|\alpha(t_0)|^2) = 1 \Longrightarrow A_0 = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha(t_0)|^2). \tag{89}$$

$$\hat{U}(t_0)\,|0\rangle = \exp(-\frac{1}{2}\,|\alpha(t_0)|^2)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(\alpha(t_0))^l(\hat{a}^+)^l\,|0\rangle \Longrightarrow$$

Теперь можно записать вероятность перехода $P_{0n} = \dfrac{1}{n!}\left|\langle 0|\,\hat{a}^n\hat{U}(t_0)\,|0\rangle\right|^2 =$

$$= \frac{1}{n!}\exp(-\,|\alpha(t_0)|^2)\left|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(\alpha(t_0))^l\,\langle 0|\,\hat{a}^n(\hat{a}^+)^l\,|0\rangle\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{n!}\,|\alpha(t_0)|^{2n}\exp(-\,|\alpha(t_0)|^2)\left|\frac{1}{n!}\,\langle 0|\,\hat{a}^n(\hat{a}^+)^n\,|0\rangle\right|^2$$

$$P_{0n} = \frac{1}{n!}\,|\alpha(t_0)|^{2n}\exp(-\,|\alpha(t_0)|^2) \tag{90}$$

9 Заключение

Получены аналитические выражения характеристик, соответствующих частным случаям эволюции квантовых систем с переменным гамильтонианом.

Список литературы

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория).

[2] Давыдов А.С. Квантовая механика (2-е изд.). М.: Наука, 1973 М.: Наука, 1976